Svolgimento del test d'autovalutazione del 29/09/2015

(1) $|2x-3|>|x+1|$ se e solo se $(2x-3)^2>(x+1)^2$ se e solo se

$$0<(2x-3)^2-(x+1)^2=[(2x-3)+(x+1)][(2x-3)-(x+1)]=[3x-2][x-4]$$

se e solo se $x<\frac{2}{3}$ o $x>4$.

(2) $1+|x|\geqslant|x+1|$ per ogni x reale, per la proprietà triangolare.

(3) Cerchiamo $\sup\{x\in\mathbb{R}\colon (x^2-2)(2x-3)(5x+1)\leqslant 0\}$. Le soluzioni della disequazione sono $x\in\big(-\infty,-\sqrt{2}\,\big]\cup\big[-.\sqrt{2},-\frac{1}{5}\big]\cup\big[\sqrt{2},3/2\big]$, quindi l'estremo superiore è $3/2$.

(4) Sia $A\subset\mathbb{R}$ superiormente limitato e sia $A^2\colon=\{x^2\colon x\in A\}$. Sicuramente A è inferiormente limitato (0 è certamente un minorante), ma non è detto che sia superiormente limitato. Per esempio, se $A=(-\infty,0)$ è l'insieme dei numeri negativi, allora $A^2=(0,+\infty)$, che non è superiormente limitato.

(5) Siano $a<b$ numeri reali e sia $B=\{x^2\colon x\in(a,b)\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e quali no?

a) B è limitato. Sì.

b) B è un intervallo aperto. No: p.es. quando $(c,d)=(-1,1)$ e quindi $B=[0,1)$.

c) B non è un intervallo aperto. No: p.es. quando $(c,d)=(1,2)$ e quindi $B=(1,4)$.

d) $\inf B=a^2$. No: vedi l'esempio in b).

e) $\sup B=b^2$. No: p.es. se $(c,d)=(-2,1)$ abbiamo che $\sup B=4\neq 1^2$.

f) 0 è un minorante di B. Sì.